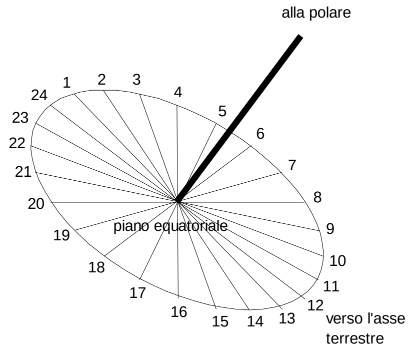
Gli orologi solari

Il progetto di una meridiana a muro preceduto da considerazioni astronomiche
e corredato da due esempi di calcolo (per meridiana orizzontale e verticale) e dall'analemma

Uno studio di Pino Sansò - 1981
calcoli originali in SOA, attuali con Excel 97 - 1998

Alcuni disegni e fotografie sull'argomento si trovano presso la Home page: **http://www.pinosan.it**

Il progetto della meridiana a muro



La meridiana ideale è costituita da un piano per la lettura delle ore parallelo al piano del cerchio equatoriale e lo gnomone (o stilo) parallelo all'asse di rotazione terrestre e perpendicolare, perciò, allo stesso piano per la lettura. In questo particolare caso le linee indicanti le ore si tracciano dividendo semplicemente in 24 spicchi di 15 gradi l'angolo giro che ha centro alla base dello stilo, con quella delle ore 12 orientata verso l'asse terrestre (coincidente perciò con la linea di massima pendenza della meridiana).

Un simile dispositivo risulterebbe un po' scomodo perché per metà anno solare dovrebbe essere letto sul piano tracciato e per l'altra metà sulla faccia opposta dello stesso piano.

La *solida* geometria della meridiana ideale può essere compresa immaginando la terra come punto di riferimento del sistema solare. Il suo asse, approssimativamente puntato verso la stella polare, ed il cerchio dell'equatore costituirebbero un discreto *orologio ad ombra* di cui l'asse sarebbe lo gnomone. In questa visione il sole percorrerebbe una linea elicoidale tracciata su un *quasi cilindro* (in effetti la distanza terra-sole non è costante) avente lo stesso asse della terra. Nonostante il periodico salire e scendere del sole lungo la superficie del cilindro, per ogni ora del giorno esso si troverebbe sullo stesso piano che la individua tra quelli del fascio passante per l'asse terrestre. Il noto ritardo ed anticipo del sole rispetto all'ora locale dipende dall'ellitticità dell'orbita terrestre, dalla legge che governa la velocità della terra nel percorrerla e perciò, nell'ipotesi precedente, dalla complessità del movimento del sole sullo pseudo-cilindro immaginato.

Nella meridiana a muro, generalmente verticale, lo stilo è ancora parallelo all'asse di rotazione terrestre mentre le linee delle ore sono costituite dalle intersezioni della parete con il fascio di piani passanti per la retta dello stilo e le linee delle ore sulla meridiana ideale (gli stessi piani della precedente riflessione). Il piano della parete e quello della meridiana ideale si intersecano lungo una retta variamente inclinata (intersezione).

Per progettare una meridiana a muro è necessario conoscere l'orientamento della parete su cui verrà tracciata, rispetto all'asse terrestre (l'informazione può essere scomposta nella conoscenza della latitudine del luogo e dell'orientamento della parete rispetto ai punti cardinali) e la longitudine del luogo: mentre la meridiana segnerebbe l'ora locale, la distanza angolare dal meridiano orario di riferimento permette le correzioni necessarie ad ottenere direttamente l'indicazione dell'ora ufficiale. Inoltre è indispensabile proiettare, mediante il calcolo trigonometrico, il sistema di spicchi regolari della meridiana ideale sul piano della parete prescelta.

L'ultima incombenza è certamente la più complessa perché richiede, oltre all'applicazione della trigonometria, un consistente sforzo dell'immaginazione per "vedere" gli angoli solidi su cui le formule matematiche devono operare.

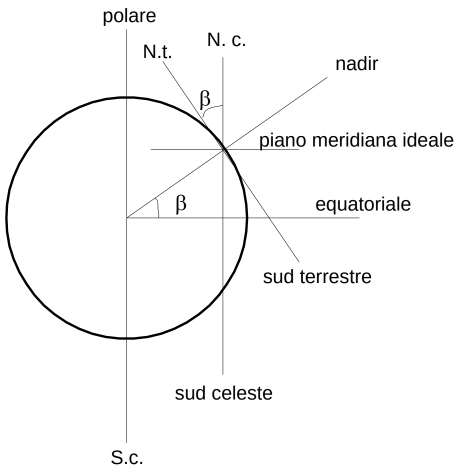
Conviene procedere per gradi e partendo dall'evidenza di certi aspetti del problema come il fatto che lo gnomone è sempre orientato verso il sud celeste (opposto alla stella polare) qualunque sia l'orientamento della parete. Fissato opportunamente lo stilo alla parete si potrebbe, volendo eliminare le ulteriori complicazioni, attendere uno dei quattro giorni in cui il sole si presenta puntuale alle diverse ore e a queste, segnare semplicemente le linee d'ombra dello stilo che esso proietta sulla parete. In questo modo si otterrebbe una soluzione empirica (e precisa) del problema.

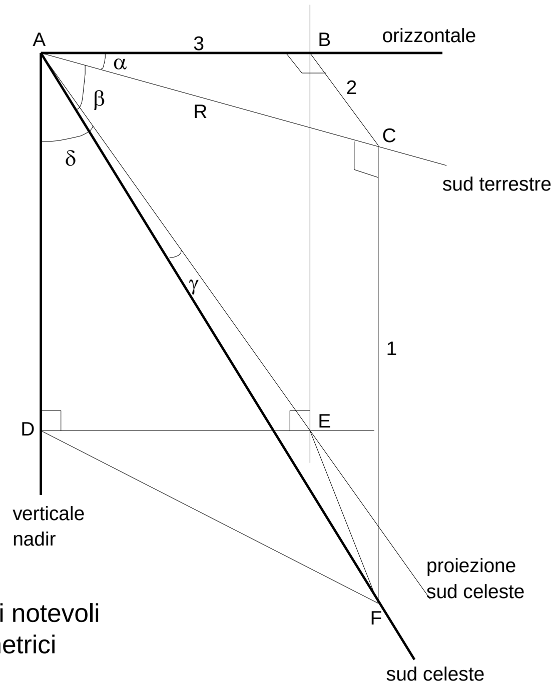
Il primo passo consiste, dunque, nel calcolare l'angolo di inclinazione dello stilo rispetto al piano della parete e l'angolo che la sua proiezione su questa forma con l'orizzontale (o la verticale): informazioni sufficienti ad un artigiano per la costruzione di base e, per ora, muta.

Le relazioni trigonometriche risultano più chiare se si impongono preliminarmente i nomi agli angoli ricorrenti nel calcolo. In questa fase ne sono sufficienti quattro, indicati con le prime quattro lettere greche, e definiti nel seguito con l'aiuto della figura.

α : tra l'orizzontale sulla parete e la direzione del sud terrestre (complementare all'orientam. della parete)
β : tra le direzioni del nord terrestre e del nord celeste (o sud ter. e sud cel.): la latitudine del posto
γ : tra la retta dello gnomone (diretto al sud cel.) e la linea della sua proiezione sulla parete
δ : tra la verticale sulla parete (nadir) e la proiezione sulla stessa dello gnomone (diretto al sud cel.)

R è la misura arbitraria di un segmento sulla retta del sud terrestre, utile al calcolo.





Un punto sull'emisfero settentrionale e le direzioni notevoli
ed il poliedro su cui si eseguono i calcoli trigonometrici

La consistenza di alcuni essenziali angoli retti e, perciò, l'esistenza di rettangoli su cui applicare la trigonometria è assicurata dal "teorema delle tre perpendicolari" coinvolto, per esempio, nel caso dei tre segmenti indicati con i numeri 1, 2 e 3 ed appartenenti a tre rette opportunamente perpendicolari.

Le considerazioni seguenti si basano, conseguentemente, su elementari relazioni trigonometriche applicate a triangoli rettangoli:

$AC = R$
$BC = EF = R \text{ sen } \alpha$
$AF = R/\cos \beta$
$EF/AF = \text{sen } \gamma = \text{sen } \alpha \cos \beta$
$\boldsymbol{\gamma = \text{arcsen}(\text{sen } \alpha \cos \beta)}$

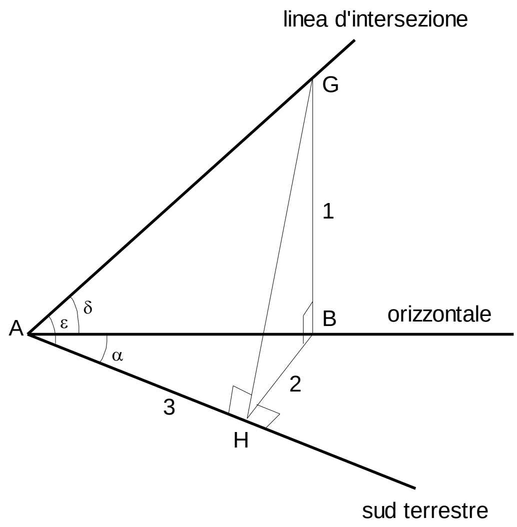
$AB = R \cos \alpha$
$BE = CF = R \text{ tg } \beta$
$AB/BE = \text{tg } \delta = \cos \alpha \,/\, \text{tg } \beta$
$\boldsymbol{\delta = \text{arctg}(\cos \alpha \,/\, \text{tg } \beta)}$

Ottenute dal calcolo le ampiezze dei due angoli sarebbe possibile procedere alla costruzione ed applicazione dello stilo sul piano della meridiana in attesa di segnare empiricamente (ma solo in uno di soli quattro giorni dell'anno) le linee delle ore.

I quattro giorni sono i seguenti: **15 aprile - 15 giugno - 1 settembre - 25 dicembre**

Altrimenti si procede con i calcoli che vengono giustificati nel seguito di questo trattatello.

L'adattamento del disegno delle linee orarie della meridiana ideale al piano della parete richiede innanzitutto l'individuazione della intersezione tra i due piani: questa linea comune era, naturalmente, perpendicolare allo gnomone prima della trasformazione e poichè, a differenza delle altre orarie, non ha necessitato di proiezioni sul nuovo piano, continua a risultare perpendicolare allo stesso gnomone.



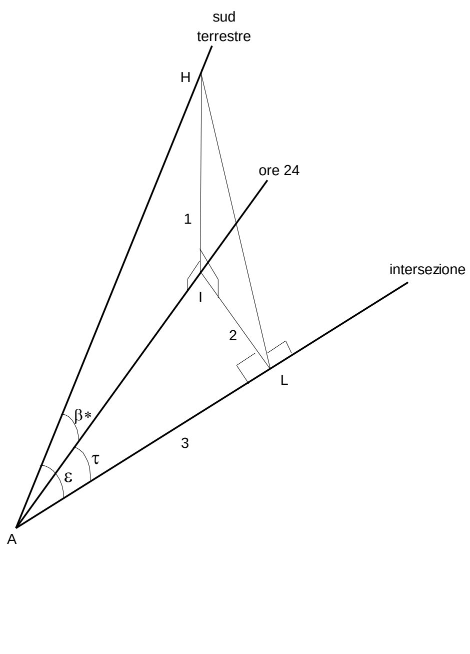
E' gia stato individuato l'angolo δ tra la verticale (del nadir) e la proiezione dello stilo sul piano della parete (anche questa perpendicolare alla intersezione): facilmente si dimostra che lo stesso angolo esiste tra l'orizzontale (perpendico-lare alla prima) e l'intersezione (perpendicolare alla seconda).

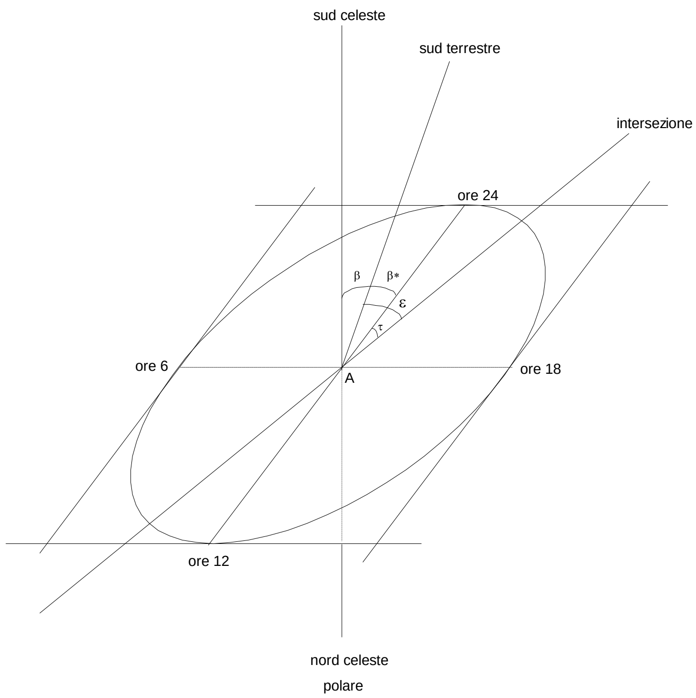
Perciò è possibile il disegno accanto in cui, esplicati-vamente, alcune rette sono indicate con i numeri 1, 2 e 3 secondo il citato teorema delle tre perpendicolari e che illustra le condizioni per la determinazione dell'angolo tra l'intersezione e la direzione del sud terrestre. La conoscenza di questo, legato alla direzione della linea oraria del mezzogiorno-mezzanotte sulla meridiana ideale, consentirà la valutazione dell'ora a cui corrisponde l'intersezione sulla meridiana ideale: valore conservato, naturalmente, sulla nuova superficie.

AH = AB cos α AG = AB/cos δ

AH\AG = cos ε = cos δ cos α **ε = arccos(cos δ cos α)**

L'angolo orario τ, che individua l'ora a cui corrisponde la linea d'intersezione, si desumerà poi dalla situazione illustrata nelle seguenti figure delle quali la seconda rappresenta ancora la meridiana ideale ma vista nella sua faccia inferiore. Ciò consente di considerare lo gnomone-sud, come nella situazione reale della parete, in relazione alle altre linee orarie sistemate, ovviamente, in senso antiorario.





AL = AH sen ε ($\beta*$ = 90 - β) AL/AI = cos τ = cos ε / sen β

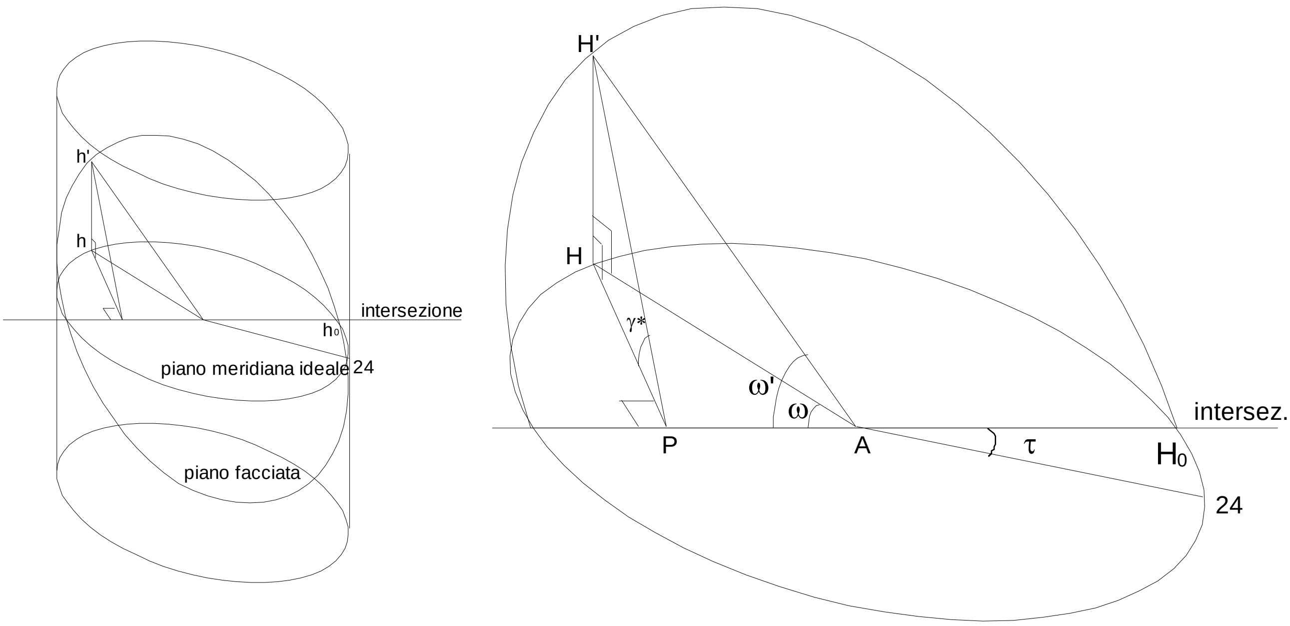
AI = AH cos $\beta*$ AI = AH sen β τ = arccos(cos ε / sen β) **τ = arccos(cos δ cos α / sen β)**

L'aspetto meno intuitivo del progetto della meridiana a muro (ma per quella sul piano orizzontale il procedimento è identico) consiste nella proiezione delle linee orarie dalla meridiana ideale alla superficie scelta. Per la comprensione del seguito del procedimento conviene ritornare all'immagine, semplificata, della terra al centro dell'universo: al suo posto un cerchio con 24 spicchi, uno stilo verticale che esce dal suo centro ed il sole che gira intorno nelle 24 ore. Se l'asse terrestre fosse perpendicolare al piano dell'eclittica questo modello sarebbe sufficiente, ma dovremmo rinunciare alle ricorrenti stagioni. In realtà, nel modello geocentrico, il sole si muove su una linea elicoidale distesa su un cilindro (l'altezza di questo è determinata da un'angolo che gli abitanti delle zone equatoriali conoscono: il cerchio più basso e quello più alto descritto dal sole nel corso dell'anno, distanti 47°, come i tropici sulla sfera terrestre).

Poichè il sole sale e scende, nel corso dell'anno, lungo la superficie del cilindro, conviene arricchire il modello di piani verticali passanti per la raggiera della meridiana. Questi, dunque, costituiscono un fascio intorno all'asse del cilindro che è anche asse della terra e retta dello gnomone: qualunque sia l'altezza del sole sul cilindro esso si trova, per ogni ora del giorno, sul medesimo piano per proiettare la propria ombra sulla medesima linea della meridiana in quanto complanare allo stilo e, ovviamente, allo stesso sole.

Questo sistema è sufficientemente corretto per concludere il progetto della meridiana senza tener conto dei periodici ritardi ed anticipi del sole sull'ora locale. In effetti, nel modello, la superficie sulla quale il sole compie i suoi giri, pur mantenendosi simmetrica rispetto all'asse centrale risulterebbe molto più complessa per motivi già accennati. Ciò che interessa è l'esistenza virtuale di quel fascio di piani a ciascuno dei quali compete l'ombra dello gnomone in una determinata ora qualunque sia l'altezza del sole sulla superficie del cilindro, cioè in qualunque giorno dell'anno. Se in quel modello inclinassimo il piano della meridiana già perpendicolare all'asse del cilindro (ed alla retta dello gnomone), l'ntersezione col cilindro diventerebbe un ellisse, i raggi del cerchio si muoverebbero lungo i piani (si è detto che ad ogni piano compete, in esclusiva, un'ombra oraria) e le estremità dei raggi sulla circonferenza originaria salirebbero, ovviamente, lungo le verticali intersezioni tra i piani e la superficie del cilindro costituendo punti dell'ellisse.

Se consideriamo come asse delle ascisse di un sistema di coordinate cartesiane la linea attorno alla quale abbiamo immaginato di ruotare il piano della meridiana ideale (la linea intersezione), i punti orari sulla circonferenza che la delimita, essendosi mossi lungo linee verticali, non possono aver modificato il valore della loro ascissa. Perciò la situazione è illustrata daI seguente disegnI e dai calcoli da essI desunti:



γ* è l'angolo tra i due piani uguale a quello tra le loro normali (tra lo gnomone e la normale alla parete)

$\gamma^* = 90 - \gamma$	$H'P = HP/\cos \gamma^* = HP/\text{sen } \gamma$	$AP = HP/\text{tg } \omega$
$\text{tg } \omega' = H'P/AP$	$\text{tg } \omega' = \text{tg } \omega/\text{sen } \gamma$	$\boldsymbol{\omega' = \text{arctg}(\text{tg } \omega/\text{sen } \gamma)}$

I nuovi angoli introdotti nel calcolo, ω e ω' sono quelli che separano l'ora presa in considerazione dalla intersezione, sul piano della meridiana ideale e sulla parete interessata. Per inciso, l'angolo γ* (complementare di γ), nel caso di pareti orientate esattamente a sud, o di meridiane costruite su supporti così orientati, coincide esattamente con la latitudine.

Per la compilazione di una efficace tabella progettuale, l'angolo (orario) riferito alla retta intersezione non è molto funzionale. Risulta invece maggiormente appropriato il riferimento alle ore 24, o zero, tenendo conto della necessità di operare i calcoli in misura angolare dove un'ora corrisponde a 15°.

Tenendo conto del fatto che l'angolo orario assoluto ρ (che definisce le ore ogni 15 gradi sulla meridiana ideale), a meno dei 180° utili alla efficacia del disegno, può prendere il posto di ω, l'ultima relazione trascritta si trasforma nel seguente modo:

$\omega = \rho + \tau$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\omega' = \mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(\rho + \tau)/\mathrm{sen}\,\gamma]}$

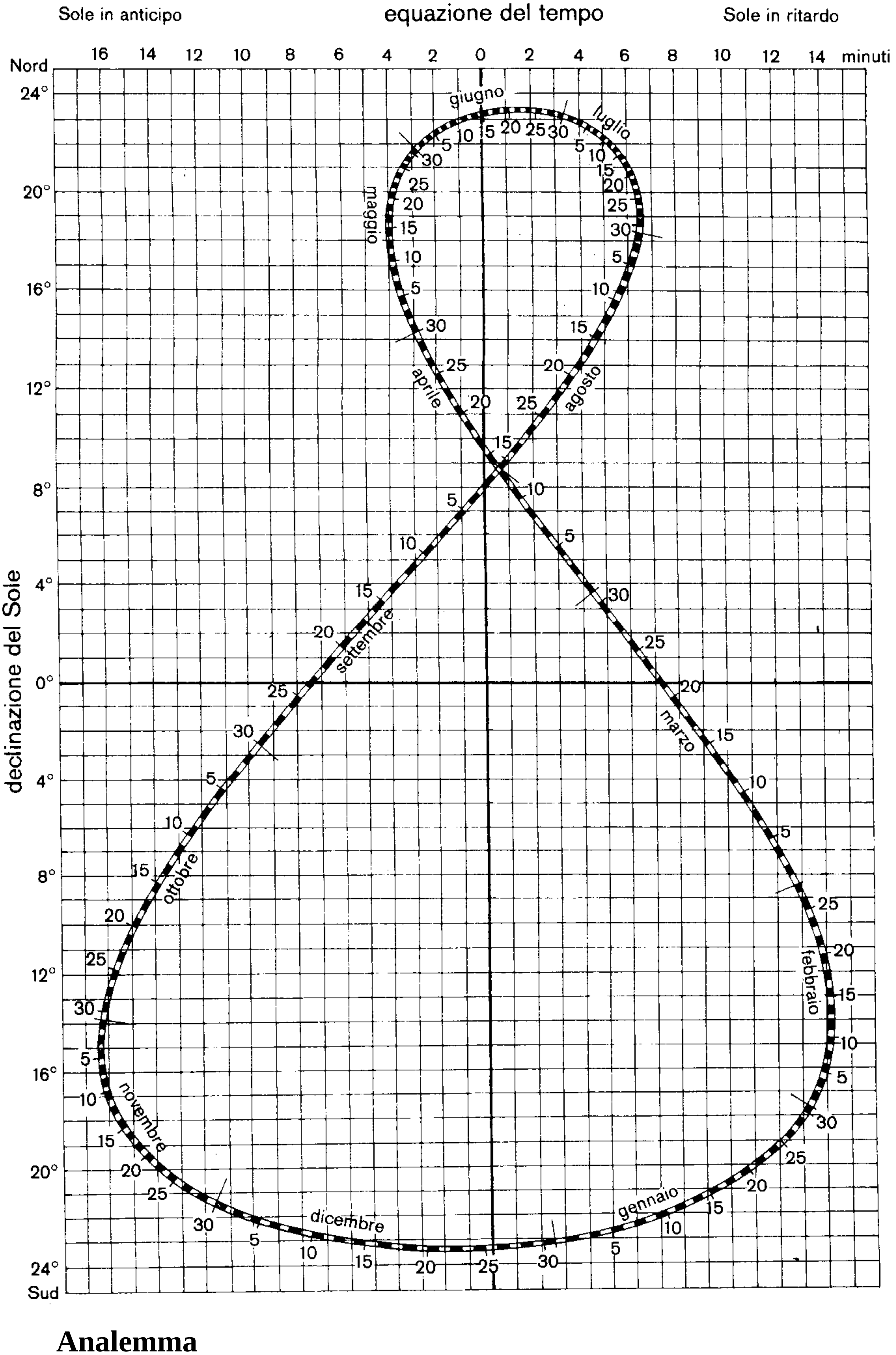
A questo punto, con la precedente relazione e noti gli angoli τ e γ, per qualunque linea oraria sulla meridiana ideale si può individuare la corrispondente sulla parete. Una meridiana così progettata, però, indicherebbe l'ora *naturale* del luogo, la cosiddetta ora locale. In realtà, in una certa zona, viene adottata l'ora ufficiale che differisce da quella ombreggiata dal sole nella misura della distanza (rapportata al tempo) del meridiano di riferimento dal luogo stesso. Il problema è, dunque, quali linee orarie della meridiana ideale proiettare su quella a parete.

Conviene perciò compilare una tabella come la seguente:

h	**h+Δh**	**(h+Δh)° = ρ**	**$\rho + \tau = \omega$**	**ω'**
6				
7				
8				
9				
...				
17				
18				
19				
20				

- h rappresenta l'ora che, compatibilmente con l'esposizione della parete, si vuole venga segnata dalla meridiana;
- la seconda colonna riporta l'ora locale ottenuta aggiungendo, o togliendo, lo sfasamento riguardante la longitudine del luogo rispotto al meridiano orario ufficiale di riferimento;
- la terza colonna riporta la quantità della seconda ma espressa in gradi e corrispondente a ρ;
- la quarta aggiunge l'angolo, già calcolato, tra l'intersezione con le ore 24, τ
- la quinta, infine, riporta l'angolo rispetto all'intersezione oltre il quale segnare la linea oraria da indicare con il valore di partenza della colonna h - la linea andrà disposta, intuitivamente, nella posizione opportuna rispetto al centro della meridiana.

Una meridiana così costruita manterrebbe ancora, per la maggior parte dei giorni dell'anno, un lieve ritardo o un lieve anticipo rispetto all'ora ufficiale (al massimo 16 minuti): ciò è dovuto alla complessità del movimento della terra intorno al sole e data la variabilità degli scarti non è possibile intervenire correggendo la traccia delle linee orarie. Tuttavia è possibile conoscere la consistenza degli stessi leggendoli su un curva empirica detta analemma e che, spesso, veniva tracciata accanto alla meridiana sulla stessa parete.


Sole in anticipo
equazione del tempo
Sole in ritardo
16 14 12 10 8 6 4 2 0 2 4 6 8 10 12 14 minuti
Nord
24°
20°
16°
12°
8°
4°
0°
4°
8°
12°
16°
20°
24°
Sud
declinazione del Sole
giugno
luglio
maggio
agosto
aprile
settembre
marzo
ottobre
febbraio
novembre
gennaio
dicembre

Analemma